Nafouz

التمرين الأول :

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+1)^2+\left[2+i(\sqrt{5}+1)\right]^2=0$.

II- في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=-1+2i$ ، $z_B=i(2-\sqrt{3})$ و $z_C=\overline{\sqrt{5}-2i}$.

1. احسب $|z_C|$ و $|z_B-z_A|$ ثم أنشئ النقط A ، B و C.

2. بين أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

3. أ) عين $z_{C'}$ لاحقة النقطة C' نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة A.

ب) علما أن الرباعي $BC'B'C$ متوازي أضلاع بين أن لاحقة النقطة B' هي $z_{B'}=-2+(2+\sqrt{3})i$.

جـ) اكتب العدد $\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}$ على شكله الأسي.

د) استنتج أن $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB})$ ، و $\frac{AC}{AB}=\frac{CB'}{CB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

التمرين الثاني :

I- a ، b و c أعداد طبيعية حيث : $1\le a\le b\le c$.

عين الأعداد a ، b و c علما أن في النظام ذي الأساس a يكون $b+c=\overline{46}$ و $bc=\overline{545}$.

II- نعتبر المعادلة $21x-17y=8$ ....(1) ، حيث x و y عددين صحيحين طبيعيين.

1. أ) عين الثنائية $(x_0;x_0)$ حل للمعادلة (1).

ب) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة (1).

2. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13.

ب) بين أنه إذا كان $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (1) فإن $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$.

3. أ) بين أنه إذا كان $(x;y)$ حل للمعادلة (1) و $x\equiv 0[4]$ فإن $y\equiv 0[4]$.

ب) عين $(x;y)$ حلول للمعادلة (1) التي يكون من أجلها $PGCD(x;y)=4$.

التمرين الثالث :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;-1;2)$ ، $B(3;0;4)$ و $C(3;3;-2)$. والمستقيم (D) المعرف بتمثيله الوسيطي التالي: $x=-1-2k$ و $y=-2+2k$ و $z=-8k$. مع k عدد حقيقي.

1. احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. استنتج طبيعة المثلث ABC .

2. أ) عين إحداثيات كل من النقطتين G و I حيث G مرجح الجملة $\{(A;3),(B;-2),(C;1)\}$ و I منتصف قطعة المستقيم $[AC]$.

ب) ما طبيعة الرباعي $ABIG$.

3. أ) احسب AG^2 ، BG^2 و CG^2 .

ب) عين مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $3MA^2-2MB^2+MC^2=18$.

Nafouz

4. نعتبر سطح الكرة (S) الذي مركزه G ونصف قطره $3\sqrt{2}$. والمجموعة (P) للنقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{V}=-18$ حيث $\overrightarrow{V}(-6;-6;0)$.

أ) عين معادلة ديكارتية للمجموعة (P).

ب) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد (P)، ثم استنتج إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة G على (P).

جـ) عين العناصر المميزة للمجموعة $(S)\cap(P)$.

5. بين أن المستويين (P) و (ABC) يتقاطعان في (D) .

التمرين الرابع :

I- باستعمال قابلية الاشتقاق للدالة $x\mapsto \ln x$ عند 1 ، بين أن: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$ ، $f(x)=\ln x+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

ب) من أجل $x\geq 1$ ، بين أن ، $x-1=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$.

جـ) بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1. فسر النتيجة بيانيا.

2. أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ، ثم شكل جدول تغير الدالة f.

جـ) ارسم المنحنى (C_f).

3. ليكن S مساحة الحيز D المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$.

A و B نقطتان من (C_f) فاصلتاهما على الترتيب 1 و 3 ، والنقطتان $P(1;2\ln(1+\sqrt{2}))$ و $Q(3;0)$ من المستوي.

أ) احسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ والمثلث ABQ .

ب) استنتج أن ، $2\ln(1+\sqrt{2})\leq S\leq 4\ln(1+\sqrt{2})$. (ملاحظة : $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$)

III- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}$ و (C_g) تمثيلها البياني.

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$ ، $g(x)\geq 1$.

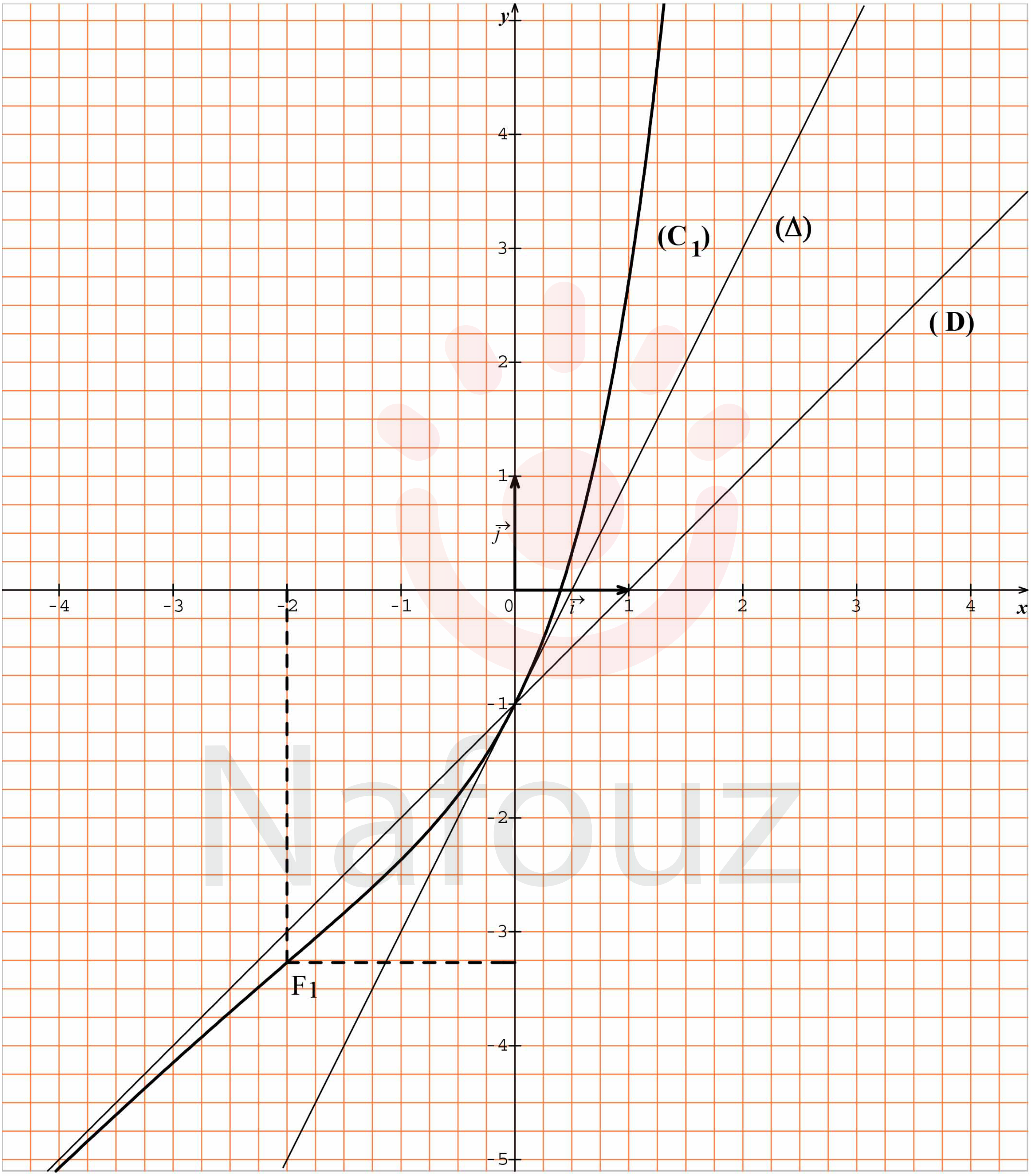
2. أ) بين أن $g\circ f(x)=x$. ثم بين أنه إذا كانت $M(x;y)$ نقطة من (C_f) فإن $M'(y;x)$ نقطة من (C_g) .

ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C_f) و (C_g) ؟ ارسم المنحنى في المعلم السابق (C_g) .

3. ليكن S' مساحة الحيز D' المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=2\ln(1+\sqrt{2})$ و $y=3$.

أ) بين أن $S'=6\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$.

ب) احسب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$ ثم استنتج قيمة S .



y
x
(C_1)
(Δ)
(D)
F_1
$\vec{i}$
$\vec{j}$
0
1
2
3
4
-1
-2
-3
-4
-5

Nafouz

الموضوع الثاني(1)

♣ التمرين الأول :

I- $(1).......(z+1)^2+\left[2+i(\sqrt{5}+1)\right]^2=0$

(1) يكافئ $(z+1)^2=\left[i\left(2+i(\sqrt{5}+1)\right)\right]^2$.

أي $z+1=-i\left(2+i(\sqrt{5}+1)\right)$ أو

$z+1=i\left(2+i(\sqrt{5}+1)\right)$.

إذن : $z=\sqrt{5}-2i$ أو $z=-(2+\sqrt{5})+2i$.

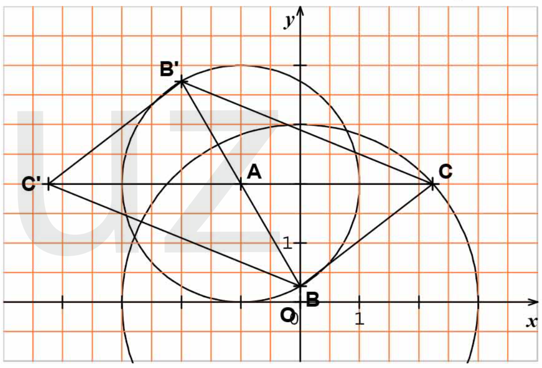
II- النقط A، B و C لواحقها على الترتيب

$z_A=-1+2i$ ، $z_B=i(2-\sqrt{3})$ و $z_C=\sqrt{5}+2i$

1. حساب $|z_C|$ و $|z_B-z_A|$.

- $|z_C|=\sqrt{5+4}=3$
- $|z_B-z_A|=|1-i\sqrt{3}|=2$

إذن : C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 3 و B هي تقاطع الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2 مع محور التراتيب .



2. $z_{S(B)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)+z_A$ ومنه

$$z_{S(B)}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}(1+i\sqrt{3})(2i-i\sqrt{3}+1-2i)-1+2i$$

أي $z_{S(B)}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}(4)-1+2i$ وأخيرا $z_{S(B)}=\sqrt{5}+2i$

إذن : $S(B)=C$

3. أ) $z_{C'}=2z_A-z_C$ أي $z_{C'}=-2+4i-\sqrt{5}-2i$

ومنه $z_{C'}=-(2+\sqrt{5})+2i$

ب) بما أن الرباعي $BC'B'C$ متوازي أضلاع فإن النقطة B' هي نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة A .

ومنه $z_{B'}=2z_A-z_B$

إذن : $z_{B'}=-2+(2+\sqrt{3})i$.

جـ) $z_{B'}-z_C=-(2+\sqrt{5})+i\sqrt{3}$

و $z_B-z_C=-\sqrt{5}-i\sqrt{3}$

ومنه $\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\frac{(-2-\sqrt{5}+i\sqrt{3})(-\sqrt{5}+i\sqrt{3})}{8}$

أي $\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}(1-i\sqrt{3})=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

د) لدينا :

$\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

إذن: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{CB'}{CB}=\frac{AC}{AB}$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB})$

♣ التمرين الثاني:

I- a، b و c أعداد طبيعية حيث : $1\le a\le b\le c$.

لدينا $b+c=\overline{46}^a$ و $bc=\overline{545}^a$ ومنه

$b+c=4a+6$ و $bc=5a^2+4a+5$

b و c هما حلا المعادلة التالية :

$(1)....x^2-2(2a+3)x+5a^2+4a+5=0$

ومنه $\Delta=4(-a^2+8a+4)$.

المعادلة (1) تقبل حلول إذا وفقط إذا كان $-a^2+8a+4\ge 0$.

$-a^2+8a+4\ge 0$ يكافئ $(a-4)^2\le 20$ أي

$a\in[4-\sqrt{20};4+\sqrt{20}]$.

بما أن عدد طبيعي أكبر تماما من 6 فإن $a=7$ أو $a=8$.

- إذا كان $a=7$ فإن $\Delta=11$ (المعادلة (1) ليس لها حل في $\mathbb{N}$.
- إذا كان $a=8$ فإن $\Delta=4$ ومنه حلا المعادلة (1) هما 17 و 21.

بما أن $b\le c$ فإن $b=17$ و $c=21$.

وأخيرا : $\boxed{a=8 ، b=17 ، c=21}$.

الموضوع الثاني(2)

-II نعتبر المعادلة $21x-17y=8$ ....(1)، حيث x و y من $\mathbb{N}$.

1. أ) $(x_0;x_0)$ حل للمعادلة (1) يكافئ $21x_0-17x_0=8$. إذن الثنائية $(2;2)$ حل للمعادلة (1).

ب) حل المعادلة (1) في $\mathbb{N}^2$.

لدينا $\begin{cases}21x-17y=8\\21x_0-17x_0=8\end{cases}$ ومنه

$21(x-x_0)=17(y-y_0)$ ..(2)

إذن: $17/21(x-x_0)$ و $PGCD(17;21)=1$

ومنه حسب مبرهنة غوص $17/(x-x_0)$ أي $(x-x_0)=17k$ مع $k\in\mathbb{N}$.

ومن (2) نحصل على $21(17k)=17(y-y_0)$.

وأخيرا مجموعة حلول المعادلة (1) هي $\boxed{\{(17k+2;21k+2),k\in\mathbb{N}\}}$.

2. أ) $9^0\equiv1[13]$ ، $9^1\equiv9[13]$ ، $9^2\equiv3[13]$ ، $9^3\equiv1[13]$.

من أجل كل عدد طبيعي k ، $9^{3k+r}\equiv9^r[13]$ حيث $r\in\{0;1;2\}$.

إذن : بواقي قسمة 9^n على 13 هي : 1 ، 9 ، 3.

ب) $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (1) يعني أن $17\beta=21\alpha-8$.

$$3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv9^{17\beta+10}-9^{21\alpha}-2[13]$$

ومنه

$$3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv9^{21\alpha+2}-9^{21\alpha}-2[13]$$

$$\equiv9^2-1-2[13]$$

$$\equiv0[13]$$

3. أ) $(x;y)$ حل للمعادلة (1) و $x\equiv0[4]$ أي و $\begin{cases}17y=4(21\lambda-2)\\x=4\lambda\end{cases}$.

إذن: $4/17y$ و $PGCD(17;4)=1$ ومنه حسب مبرهنة غوص $4/y$. أي $y\equiv0[4]$.

ب) $(x;y)$ حلول للمعادلة (1) و $PGCD(x;y)=4$.

إذن: $x\equiv0[4]$ يعني أن $17k+2\equiv0[4]$ أي $k=4\gamma+2$.

ومنه $x=4(17\gamma+9)$ و $y=4(21\gamma+11)$ و $PGCD(17\gamma+9;21\gamma+11)=1$. و لدينا أيضا $PGCD(17\gamma+9;21\gamma+11)=PGCD(17\gamma+9;2)$.

(لأن $(x;y)$ حلول للمعادلة (1))

إذن: $PGCD(17\gamma+9;21\gamma+11)=1$ يعني أن $\gamma=2\beta$.

وأخيرا : من أجل كل عدد طبيعي β ، حلول للمعادلة (1) التي يكون من أجلها $PGCD(x;y)=4$ هي : $x=136\beta+36$ و $y=168\beta+44$.

♣ التمرين الثالث :

لدينا النقط $A(1;-1;2)$ ، $B(3;0;4)$ و $C(3;3;-2)$

1. حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(2;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(2;4;-4)$.

ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4+4-8=0$ أي $(AB)\perp(AC)$.

إذن: ABC مثلث قائم في A .

2. أ) • G مرجح الجملة $\{(A;3),(B;-2),(C;1)\}$

ومنه $G(0;0;-2)$.

• I منتصف قطعة المستقيم $[AC]$.

ومنه $I(2;1;0)$.

ب) لدينا $\overrightarrow{GI}(2;1;2)$ أي $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GI}$.

ومنه الرباعي $ABIG$ متوازي أضلاع.

3. أ) $\overrightarrow{AG}(-1;1;-4)$ ، $\overrightarrow{BG}(-3;0;-6)$ و $\overrightarrow{CG}(-3;-3;0)$.

ومنه $AG^2=18$ ، $BG^2=45$ و $CG^2=18$.

ب) $3MA^2-2MB^2+MC^2=18$ ....(2)

باستعمال علاقة شال والمرجح G (2) تصبح :

$$3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2-2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2=18$$

أي $2MG^2+3GA^2-2GB^2+GC^2=18$ لأن

$$2\overrightarrow{MG}.(3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=\vec{0}$$

إذن : (2) تكافئ $2MG^2=36$.

وأخيرا مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق(2) هي سطح كرة مركزه G ونصف قطره $3\sqrt{2}$.

4. (S) سطح الكرة الذي مركزه G ونصف قطره $3\sqrt{2}$.

أ) $M(x;y;z)\in(P)$ يكافئ $\overrightarrow{MG}.\vec{V}=-18$.

بما أن $\overrightarrow{MG}(-x;-y;-2-z)$ و $\vec{V}(-6;-6;0)$ فإن $\overrightarrow{MG}.\vec{V}=-18$ يكافئ $6x+6y=-18$.

إذن المعادلة الديكارتية لـ (P) هي $x+y+3=0$.

ب) المستقيم (Δ) يمر بالنقطة G ويعامد (P)، أي الشعاع الناظمي لـ (P) $\vec{n}(1;1;0)$ هو شعاع توجيه لـ (Δ) أي نعتبر $(G;\vec{n})$ معلم للمستقيم (Δ).

ومنه $M(x;y;z)\in(\Delta)$ يكافئ $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z-2 \end{cases}$ مع t عدد حقيقي.

• الاستنتاج : $\{H\}=(P)\cap(\Delta)$.

ومنه $t+t+3=0$ أي $t=-\dfrac{3}{2}$.

وأخيرا : $H(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2};-2)$.

جـ) تعيين العناصر المميزة للمجموعة $(P)\cap(S)$.

• $d(G,(P))=GH=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}<3\sqrt{2}$ ومنه $(P)\cap(S)$ هي الدائرة التي مركزها H ونصف قطرها r حيث $r=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-HG^2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$.

5. المستقيم (D) معرف بتمثيله الوسيطي التالي: $x=-1-2k$ و $y=-2+2k$ و $z=-8k$. مع k عدد حقيقي.

• $(D)\subset(P)$ لأن $(-1-2k)+(-2+2k)+3=0$.

• (D) يمر بالنقطة $E(-1;-2;0)$ ويوازي $\vec{u}(-2;2;-8)$

لدينا $\overrightarrow{AE}(-2;-1;-2)$ و $\vec{u}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

أي أن E تنتمي إلى (ABC) و $\vec{u}$ شعاع من (ABC).

إذن : $(D)\subset(ABC)$. $(\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB})$

وأخيرا: المستويان (P) و (ABC) يتقاطعان في (D).

♣ التمرين الرابع :

I- • الدالة $x\mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ ومنه $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\dfrac{1}{x}=1$

أي $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$.

• نضع $X=x-1$ ومنه

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{X\to 0}\frac{\ln(X+1)}{X}=1.$$

II- f دالة معرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1. أ) من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$،

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}\right)=\ln\left(x\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]\right)$$

ومنه $f(x)=\ln x+\ln\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)$.

($\sqrt{x^2}=|x|$ ، $\ln ab=\ln a+\ln b$ مع $a>0$ ، $b>0$)

ب) من أجل $x\geq 1$،

$$\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=\frac{x}{x}\sqrt{(1-x^2)\frac{x-1}{x+1}}$$

أي $\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)=\sqrt{(x-1)^2}=x-1$.

جـ) الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1 بالفعل

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\ln x}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\ln(1-\frac{1}{x^2}))}{x-1}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\ln(1-\frac{1}{x^2}))}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\times\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=+\infty$

$(\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}=0)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

إذن : المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الترتيب عند النقطة التي فاصلتها 1.

2. أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+\sqrt{x^2-1})=+\infty$.

ب) f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و

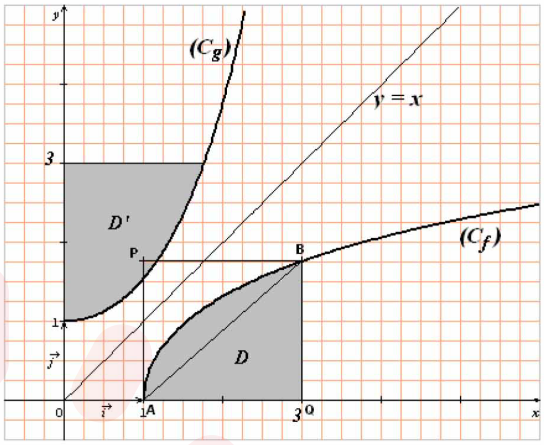
$$f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}>0.$$

• جدول تغير الدالة f.

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $\qquad$ $+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

Nafouz

الموضوع الثاني(4)



3. أ) النقطة A من (C_f) أي $A(1;0)$ ، كذلك B نقطة من (C_f) فاصلتها 3 أي $B(3;f(3))$ حيث $f(3)=\ln(3+2\sqrt{2})=2\ln(1+\sqrt{2})$.

• مساحة المثلث ABQ تساوي $f(3)$.

• مساحة المستطيل $APBQ$ تساوي $2f(3)$.

ب) نلاحظ أن المساحة S محصورة بين مساحة المثلث ABQ و مساحة المستطيل $APBQ$.

إذن : $2\ln(1+\sqrt{2})\le S\le 4\ln(1+\sqrt{2})$

III- g الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ :

$g(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}$ و (C_g) تمثيلها البياني.

1. من أجل كل عدد حقيقي $x\ge 0$ ،لدينا

$g(x)-1=\dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{2e^x}=\dfrac{(e^x-1)^2}{2e^x}\ge 0$.

إذن : من أجل كل عدد حقيقي $x\ge 0$ ، $g(x)\ge 1$.

2. أ) $g\circ f(x)=g(f(x))$ ومنه

$$g\circ f(x)=\frac{e^{2f(x)}+1}{2e^{f(x)}}=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2+1}{2(x+\sqrt{x^2-1})}$$

أي $g\circ f(x)=\dfrac{2x(x+\sqrt{x^2-1})}{2(x+\sqrt{x^2-1})}=x$.

• $M(x;y)$ نقطة من (C_f) يعني أن $y=f(x)$ ، وبما أن $g(f(x))=x$ فإن $M'(f(x);x)$ نقطة من (C_g).

ب) بما أن المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس فإن المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظرين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$. (المنصف الأول)

3. S' مساحة الحيز D' المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=2\ln(1+\sqrt{2})$ و $y=3$.

أ) $S'=\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}(3-g(x))dx$ أي

$S'=3x]_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$ ومنه

$S'=6\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$.

ب) حساب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$.

$\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx=\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx$ ومنه

$$\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})]_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^2-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^2\right]$$

و أخيرا : $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx=2\sqrt{2}$.

• بما أن (C_f) و (C_g) متناظرين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$ فإن $D=D'$ و منه $S=S'$.

إذن : $S=S'=6\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$

$=6\ln(1+\sqrt{2})-2\sqrt{2}u.a$